

Les miroirs ardents de Dioclès

Par Jacques Sesiano, Genève

1. Introduction

Voici vingt-deux siècles prenait fin le siège de Syracuse avec l'entrée des Romains dans la cité, Marcellus à leur tête. Le plaisir de cette victoire devait toutefois avoir un goût amer pour le général romain: le pilier de la défense de Syracuse, que Marcellus admirait quoi qu'il en eût coûté aux assiégeants, et qu'il désirait ardemment connaître, tombait, victime d'un irascible soldat qui ne l'avait pas reconnu.

Plutarque, qui nous rapporte cette triste fin, nous a également décrit de saisissante manière les mécanismes de défense mis en place par Archimède¹. L'effet, remarque-t-il à la fin, en fut tel qu'il suffisait qu'un menu morceau de bois fût brandi au-dessus des remparts pour que les soldats romains prissent la fuite en désordre, terrorisés qu'ils étaient à l'idée qu'Archimède allait mettre en action quelque nouvel appareil de guerre.

Le génie inventif d'Archimède laissa une profonde impression. Mais, parmi toutes ses découvertes à usage militaire, il en est une qui marqua d'une empreinte plus profonde l'imagination des générations ultérieures, et c'est sa destruction par le feu de navires romains à l'aide de miroirs réfléchissant les rayons solaires. D'entrée, remarquons qu'il est difficile d'accorder à cette invention le même crédit qu'aux autres. D'abord, les témoignages sont suspects: les sources précédemment mentionnées (cf. n. 1), pourtant riches de détails, ne font même pas rapport d'un incendie des navires; il n'en est question que trois siècles après la mort d'Archimède, et les relations s'en font plus précises à mesure que les siècles passent². Ensuite, des raisons de technique rendent l'incendie de navires par réflexion de rayons solaires peu crédible. L'emploi d'un seul miroir, parabolique, est à rejeter du fait de l'éloignement des navires – et donc de la dimension et de l'évasement qu'aurait dû avoir un tel miroir – ainsi que des difficultés qui se présenteraient lors de la visée d'un but, mobile, en un point précis. Il reste, certes, la possibilité d'utiliser un ensemble de miroirs

1 *Marc.* 14–19. Cf. *Pol.* 8, 5–7; *Liv.* 24, 34.

2 Si Lucien mentionne l'incendie de navires (*Hippias* 2), il ne parle pas de miroirs. Galien (*De temperamentis* 3, 2) précise que la destruction eut lieu διὰ τῶν πυρῶν. Les sources tardives et byzantines sont friandes d'enjolivures sur l'emploi de miroirs ardents.

plans réfléchissant les rayons en un même point. Buffon pensait avoir corroboré cette hypothèse lorsqu'il put faire fondre du bois et du plomb à des distances respectives de 200 et 130 pieds à l'aide de 168 miroirs plans³. Mais Syracuse assiégée n'était sans doute guère en mesure de disposer d'une quantité comparable de miroirs; en outre, ces miroirs auraient dû pouvoir être manœuvrés séparément afin qu'ensemble ils fissent converger les rayons en un même point d'un but qui, encore une fois, pouvait facilement être déplacé.

Ainsi, il apparaît plus prudent de ramener le problème des miroirs ardents d'Archimède à son importance historique réelle: celle d'un problème *théorique*, à savoir la faculté qu'aurait eue Archimède, ou ses contemporains, de reconnaître les propriétés de combustion de certains miroirs concaves, lesquels auraient alors trouvé quelques menues applications⁴.

Un pas capital vers la solution de ce problème a été franchi voici une dizaine d'années avec la publication d'un traité grec, postérieur au plus d'une génération à Archimède. Il s'agit de l'étude de Dioclès «Sur les miroirs ardents» (Περὶ πυρ(ε)ρίων), qui n'existe plus que dans une traduction arabe, mais faite sur un texte grec victime d'importantes altérations dans la basse antiquité⁵.

2. Le texte arabe conservé

La traduction arabe porte le titre «Livre de Dioclès sur les miroirs ardents» (Kitāb Dhīyūqlīs fī'l-marāyā 'l-muḥriqa). De fait, seul le début de l'ouvrage traite des miroirs ardents, et il apparaît que l'on a en réalité la réunion de trois petits traités, séparés l'un de l'autre par des propositions qui sont visiblement des interpolations. Ces trois traités sont:

1. L'étude de Dioclès sur les miroirs ardents, consistant en cinq propositions.
2. Le traitement d'un problème posé par Archimède, mais dont la solution n'était pas conservée, à savoir celui de couper une sphère par un plan en telle sorte que les volumes des deux calottes sphériques résultantes soient dans un rapport donné (deux propositions).
3. La solution de Dioclès du problème dit de la duplication du cube, ou de Délos, soit la construction géométrique du côté d'un cube double en volume d'un cube donné (six propositions).

3 Mémoires de l'Académie royale des sciences 1748, 305–306; cf. 1747, 82–101.

4 Ma collègue S. Niksic (Genève) attire mon attention sur la mention que fait Plutarque de l'usage de miroirs paraboliques à facettes pour ranimer un feu perpétuel qui se serait éteint (*Numa* 9, 13–14).

5 Edition, traduction et commentaire de G. Toomer, *Diocles On burning mirrors* (Berlin/Heidelberg 1976). Une seconde édition, avec d'importantes additions, est en préparation, et c'est à elle que l'on se reportera pour les informations complémentaires. Une étude attentive des connaissances et du vocabulaire mathématiques de Dioclès (vocabulaire rendu fidèlement par le traducteur en arabe) a permis à Toomer de placer l'existence de Dioclès vers 200 av. J.-C.; les estimations modernes antérieures, qui s'appuyaient sur deux extraits de l'ouvrage de Dioclès remaniés par Eutocius (cf. *infra*), le plaçaient un siècle plus tard.

Nous ignorons quand ont été réunis ces trois traités de sujets différents. Mais comme il apparaît que dans deux d'entre eux, le premier et le troisième, les expressions utilisées pour désigner les sections coniques sont des dénominations archaïques, alors qu'elles ont la forme «moderne» dans le second⁶, on peut admettre au moins que les trois traités ont circulé séparément au début⁷. Comme d'autre part un commentateur tardif d'Archimède, Eutocius (vers 500), extrait des second et troisième traités des propositions dont il dit qu'elles sont de Dioclès et qu'elles se trouvent dans son ouvrage «Sur les miroirs ardents» (ἐν τῷ Περὶ πυρίων), il est clair qu'à la fin de l'antiquité le recueil qui est à la base de la traduction arabe était déjà considéré comme un seul et même ouvrage, concernant les miroirs ardents.

A cette modification essentielle du traité originel, il faut ajouter l'apparition, çà et là, d'éléments étrangers au texte primitif, généralement des gloses marginales venues s'intégrer au corps du texte.

3. *L'étude de Dioclès sur les miroirs ardents*

Dans l'introduction, Dioclès explique quels sont les deux problèmes dont il va présenter la résolution. Ce sont les suivants:

1) Déterminer une surface qui, placée face au Soleil, en réfléchisse les rayons en un seul point et y provoque ainsi la combustion. Ce problème lui fut soumis par l'astronome Zénodore alors en Arcadie.

2) Déterminer une surface qui, placée face au Soleil, en réfléchisse les rayons sur la circonférence d'un cercle. Ce problème fut posé par Pythion dans une lettre à Conon.

Dioclès ajoute que la réponse au premier problème fut l'œuvre de Dositheus; quant au second, dont l'intérêt n'était que théorique puisqu'il n'avait pas d'application qui pût le rendre célèbre, il ne trouva pas de réponse. Dioclès annonce qu'il présentera de l'un et de l'autre démonstrations et explications⁸.

Proposition I

Dans sa première proposition – dont nous ne reproduisons pas la démonstration –, Dioclès établit la propriété optique fondamentale de la parabole: tout rayon parallèle à l'axe de la parabole rencontrant celle-ci en un point quelcon-

6 Introduite par Apollonius de Perge (env. 200 av. J.-C.).

7 Il serait vain d'aller jusqu'à mettre en doute l'attribution à Dioclès de l'un voire des deux autres traités.

8 Archimède fait à diverses reprises allusion au décès (récent) de Conon et il adresse plusieurs de ses traités à Dositheus (il apparaît ainsi clairement que les deux problèmes intéressaient des contemporains, et amis, d'Archimède). Pythion, lui, n'est connu que par cette mention. Quant au nom Zénodore, qui est celui d'un mathématicien connu, c'est le résultat d'une conjecture de Toomer; la lecture suivant le plus fidèlement la transcription arabe serait Hippodamas – lequel ne serait alors, comme Pythion, connu que par cette mention.

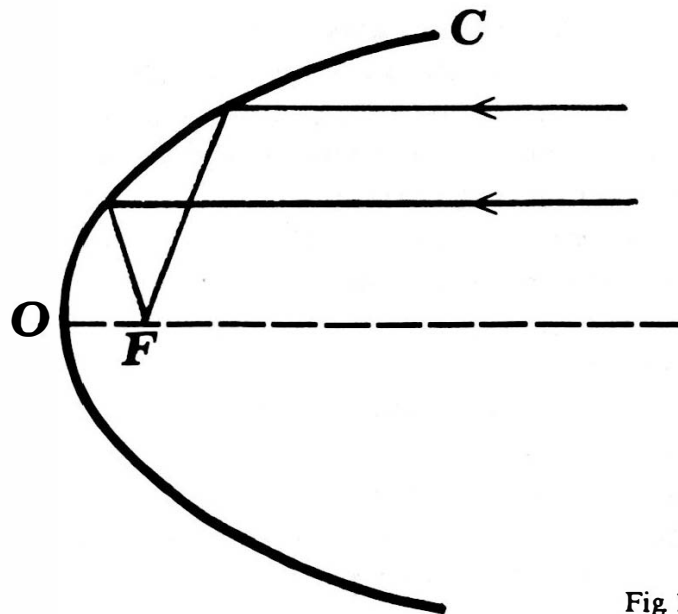


Fig 1

que sera réfléchi de telle manière qu'il passera par un seul et même point de l'axe. Ce point où se croisent tous les rayons réfléchis est le foyer de la parabole (fig. 1).

La connaissance de cette propriété permet déjà à Dioclès de construire des miroirs remplissant les conditions des deux problèmes proposés.

a) Par rotation de la parabole autour de son axe (donc autour de la droite OF prolongée), on obtient une surface qui, placée face au Soleil, réfléchira tous les rayons vers un même point: c'est le miroir parabolique. Plus la surface du miroir est grande, plus grand sera le nombre de rayons réfléchis passant par F, et plus intense sera conséquemment la combustion au foyer. Cette surface apporte donc une solution au premier problème⁹.

b) Considérons maintenant le demi-arc de parabole OC, et imaginons

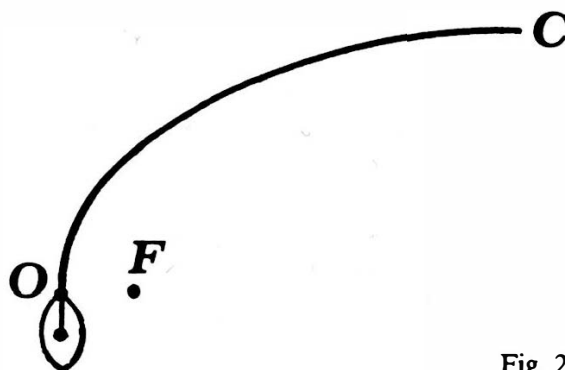


Fig. 2

⁹ Il peut être utile de rappeler que les miroirs paraboliques sont actuellement utilisés surtout dans le sens contraire: une source lumineuse placée au foyer produira après la réflexion un faisceau de rayons parallèles.

qu'un cercle passant par O se trouve dans le plan vertical tangent au sommet de la parabole (fig. 2). Si alors l'arc se déplace autour du cercle en restant dans un plan contenant le rayon du point de la circonférence concerné et perpendiculaire au plan tangent susmentionné, la surface ainsi formée (une sorte d'entonnoir parabolique) remplira les conditions du second problème. En effet, le foyer F du demi-arc de parabole aura décrit un cercle semblable au cercle décrit par O , sur chaque point duquel un des arcs de parabole renverra les rayons. Dioclès remarque aussi que l'on pourrait provoquer la réflexion sur quelque autre courbe: car la courbe que l'on aura fait parcourir, sous les mêmes conditions que ci-dessus, au point O , sera décrite, un peu plus avant, par le foyer F ¹⁰.

Proposition II

La seconde proposition du traité de Dioclès a pour objet l'étude qualitative du miroir (hémi-)sphérique. Certains, nous dit Dioclès au début du traité, pensaient que dans ce cas la réflexion se faisait vers le centre de la sphère; sa proposition montrera que la réflexion a en fait lieu sur un segment de droite, situé sur l'axe du miroir placé face au Soleil.

L'étude géométrique qui suit diffère quelque peu de celle de Dioclès, bien qu'elle en reprenne les éléments principaux. Elle a l'avantage d'être plus simple et de mieux rendre compte du phénomène. Elle est en outre parfaitement conforme aux raisonnements géométriques antiques¹¹.

Considérons (fig. 3) un demi-cercle de centre O ; soient P un point de sa circonférence et d la tangente au cercle en ce point. Supposons que SP soit un

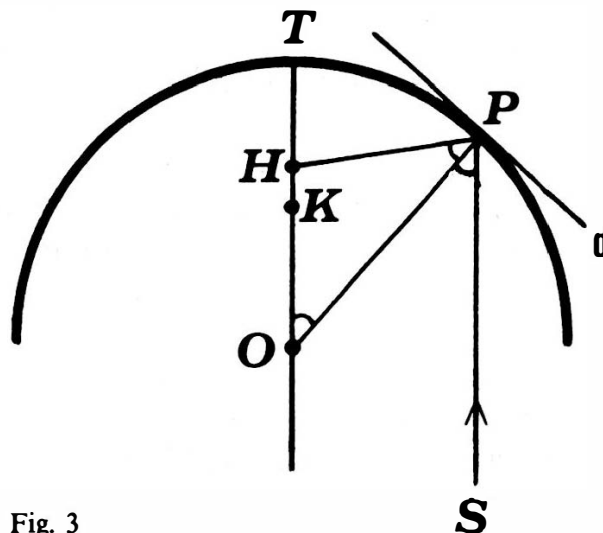


Fig. 3

10 Un autre mode de rotation d'un arc de parabole pour obtenir une surface réfléchissante – autour d'une perpendiculaire à l'axe OF – est expliqué dans le texte. Mais son authenticité est douteuse, tout comme l'est celle de la phrase qui l'annonce dans l'introduction.

11 Les théorèmes utilisés se trouvent dans la *Catoptrique* de (Ps.-)Euclide et dans les *Eléments* d'Euclide.

rayon solaire incident. Par la loi de la réflexion, le rayon réfléchi PH formera avec d un angle égal à celui que formait SP avec d¹²; comme le rayon du cercle, OP, est perpendiculaire à d, les angles complémentaires HPO et OPS seront eux aussi égaux. Comme en outre la droite SP est parallèle à la droite OT, les angles HOP et OPS sont égaux¹³; donc, les angles HOP et HPO seront égaux. Par suite, les côtés HO et HP du triangle HOP sont égaux¹⁴. Or, le point P était quelconque; il s'ensuit de là que pour tout P le triangle HOP restera un triangle isocèle, donc que le point de réflexion H sera toujours situé sur l'axe à égale distance du point d'incidence P et du centre du cercle O.

Cette propriété nous permet l'étude qualitative de la réflexion sur le demi-cercle:

Le cas extrême de la réflexion directe a lieu lorsque H coïncide avec T. Alors, OH = OT sera égal au rayon, donc TP aussi, et l'angle TOP de ce triangle équilatéral vaudra 60°. Pour un angle plus grand, il n'y a plus de réflexion directe, mais réflexion multiple (ou: image virtuelle derrière le demi-cercle, sur l'axe prolongé).

Considérons le cas de la réflexion directe. Plus le point P se rapproche de T, plus le point H se rapproche de O. Mais il ne l'atteint pas: le triangle HOP restant un triangle isocèle, le cas extrême, correspondant à un triangle «plat» (pour un angle de 0°), aurait son sommet H en K, le milieu de OT. Ainsi, tous les rais issus de la réflexion passeront uniquement par la moitié supérieure KT du rayon OT, et aucun ne sera dévié plus bas.

La propriété du miroir (hémi-)sphérique, engendré par la rotation du demi-cercle autour de l'axe OT, est donc de renvoyer similairement tous les rais lumineux sur ce demi-rayon supérieur. Chaque point de ce demi-rayon sera l'image d'un cercle du miroir, situé dans un plan perpendiculaire à l'axe. Telles sont les conclusions auxquelles parvient Dioclès.

Proposition III

Cette réflexion n'a pas la même concentration sur chaque partie du demi-rayon. Dioclès va donc poursuivre avec l'étude qualitative de la réflexion. Il montrera qu'elle devient plus intense au fur et à mesure que l'on s'approche du point K.

Nous procéderons ici aussi un peu différemment de Dioclès, dans le but d'obtenir une expression générale; mais, ici encore, nous ne sortirons pas du cadre des connaissances antiques – sinon par l'écriture.

Soit à nouveau (fig. 4) un point P du cercle, déterminé par son abscisse $OX = x$ et son ordonnée $OY = y$ dans un système de coordonnées passant par le

¹² *Catoptrica* 1.

¹³ *Elementa* 1, 29 (égalité des angles alternes-internes formés par une droite coupant deux parallèles).

¹⁴ *Elementa* 1, 6 (égalité des côtés d'un triangle opposés à des angles égaux).

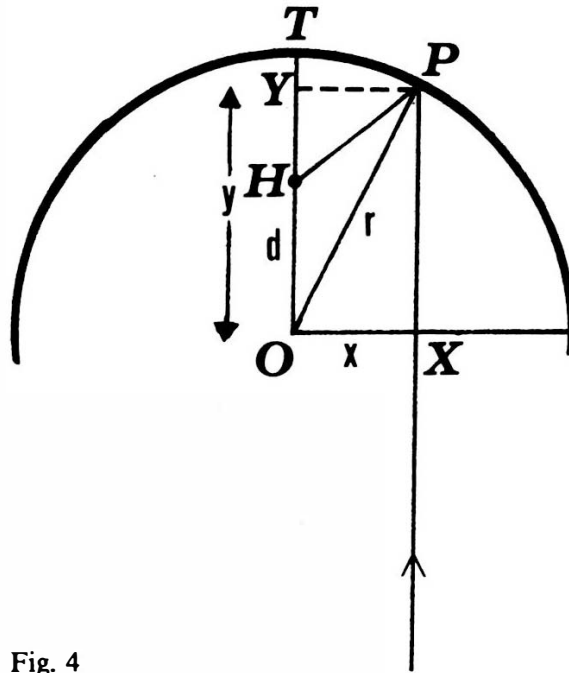


Fig. 4

centre O du cercle. Soient encore H le point de réflexion sur l'axe, $r = OP$ le rayon du cercle, et d la distance OH.

Par le théorème de Pythagore¹⁵, on a que

$$HP^2 = HY^2 + YP^2 = (y-d)^2 + x^2 = y^2 - 2 dy + d^2 + x^2.$$

Comme HP et $d = OH$ sont égaux (prop. II), il reste que

$$x^2 + y^2 = 2 dy;$$

or, puisque

$$x^2 + y^2 = r^2$$

et donc

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$r^2 = 2dy = 2d \sqrt{r^2 - x^2},$$

d'où finalement

$$d = \frac{r^2}{2 \sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Nous connaissons ainsi la position du point de réflexion sur l'axe en fonction de la distance x .¹⁶ Considérons quelques cas particuliers:

1) Pour $x = r$, la valeur de d devient infinie (le point – virtuel – de rencontre avec l'axe est à l'infini derrière le demi-cercle).

¹⁵ *Elementa* 1, 47.

¹⁶ Dioclès, qui n'a pas cette relation générale, calcule d pour deux cas particuliers (cf. infra), ce qui est suffisant pour son dessein.

2) Pour

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} r,$$

on trouve $d = r$; c'est le cas extrême de la réflexion directe, qui correspond à un angle au centre de 120° s'étendant de part et d'autre du point T. Si x est supérieur à

$$\frac{\sqrt{3}}{2} r,$$

la réflexion est multiple. Ce cas a été mentionné dans la proposition II.

3) Pour

$$x = \frac{r}{2},$$

on obtient

$$d = \frac{r}{\sqrt{3}};$$

en ce cas, l'angle POT vaut 30° , donc l'angle d'ouverture total, de 60° , est la moitié du précédent.

4) Enfin, pour $x = 0$, on obtient

$$d = \frac{r}{2},$$

conformément à ce que nous avons vu dans la proposition II.

Revenons à Dioclès. Nous l'avons dit, son but dans la proposition III est de montrer que la répartition des rayons réfléchis n'est pas uniforme sur le demi-rayon. Ceci va l'amener à considérer nos cas (2) et (3) ci-dessus. Plus précisément, il va montrer que (fig. 5), alors que les rayons réfléchis sur l'arc \widehat{AB} sont renvoyés sur l'ensemble du demi-rayon KT, ceux d'entre eux qui sont réfléchis sur l'arc \widehat{CD} , donc sur la *moitié* de l'arc \widehat{AB} , seront concentrés sur un petit segment *moindre que le sixième* du demi-rayon KT. Dioclès démontre cette inégalité de répartition de la manière suivante (nous recourons, ici encore, à une écriture moderne).

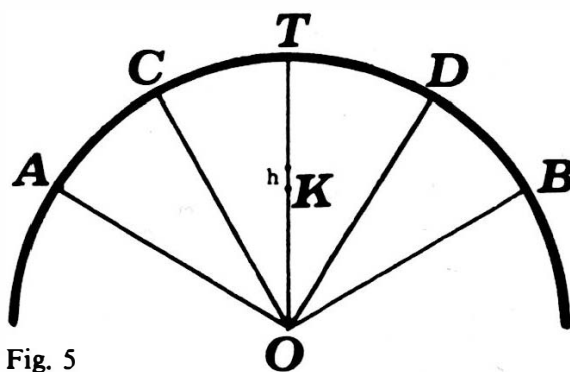


Fig. 5

Appelons ρ le demi-rayon $KT = KO$ et h la partie sur laquelle sont réfléchis les rayons tombant sur l'arc de 60° . Nous avons vu (cas 3 ci-dessus), et Dioclès l'a préalablement démontré, que pour cet angle

$$d = \rho + h = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{2\rho}{\sqrt{3}}.$$

Donc,

$$(\rho + h)^2 = \frac{4\rho^2}{3}$$

soit

$$\rho^2 + 2\rho h + h^2 = \frac{4\rho^2}{3},$$

ou

$$3\rho^2 + 6\rho h + 3h^2 = 4\rho^2,$$

et

$$6\rho h + 3h^2 = \rho^2.$$

Négligeant le petit terme positif $3h^2$, nous aurons que

$$6\rho h < \rho^2$$

soit

$$6h < \rho,$$

qui est l'évaluation précédemment mentionnée.

Dioclès est ainsi à même de caractériser les propriétés de combustion du miroir sphérique, obtenu par rotation du demi-cercle autour de l'axe OT , lorsqu'il est placé face au Soleil. D'abord, la zone de combustion sera limitée à une petite partie du rayon, l'intensité de la réflexion sur l'axe n'étant point négligeable que dans le voisinage immédiat du milieu du rayon. Ensuite, cette zone de combustion ne sera créée que par une petite partie du miroir, les rayons renvoyés sur ce petit segment provenant tous de la réflexion sur une étroite calotte entourant le sommet du miroir.

Cela ne signifie pas que le miroir hémisphérique complet n'ait aucune utilité. En effet, la petite calotte sphérique provoquant la combustion n'agira que pour autant qu'elle soit face au Soleil; or, comme le Soleil change de place, un miroir hémisphérique permettra à la calotte agissante de se déplacer sans que soit modifiée la position du miroir. Ainsi, l'activité de combustion se poursuivra durant le temps d'ensoleillement, et se traduira par le déplacement du segment de combustion en sens inverse du déplacement apparent du Soleil. Dioclès eut alors l'idée d'utiliser un tel miroir comme horloge, la position de la raie de combustion servant à marquer l'heure¹⁷.

17 Dioclès avait mentionné dans l'introduction (cf. supra p.195) que, si le problème du miroir sphérique n'avait pas atteint la célébrité de celui du miroir parabolique, c'est parce qu'aucune application (propre à frapper l'imagination) ne lui était associée. C'est juste après ceci qu'il expose l'usage de ce miroir comme horloge. Sans doute est-ce sa découverte, tout comme la démonstration mathématique des propriétés du miroir sphérique.

Les propositions IV et V du traité concernent à nouveau le miroir parabolique. La première enseigne comment construire la parabole de courbure appropriée lorsque l'on s'impose la valeur de la distance entre le sommet du miroir et le lieu du foyer. Dans la proposition V, il est prouvé que la courbe résultante possède bien les caractéristiques de la parabole. Ces propositions ne concernent donc plus les propriétés spécifiquement catoptriques des miroirs ardents paraboliques et sphériques. Il est vrai que, dans ses trois premières propositions, Dioclès a exposé aux hommes de science d'alors ce qu'il fallait en savoir. Ce faisant, il a aussi démontré aux historiens d'aujourd'hui qu'à l'époque d'Archimède, ou peu après, le problème des miroirs ardents était théoriquement résolu.